



“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo” Nelson Mandela.

Área: ciencias naturales

Asignatura: Física

Docente: Leonel Antonio romero ucros Grado: 10° Período: 1

Estándar: \_ Cómo se construye la ciencia / Funciones y gráficas

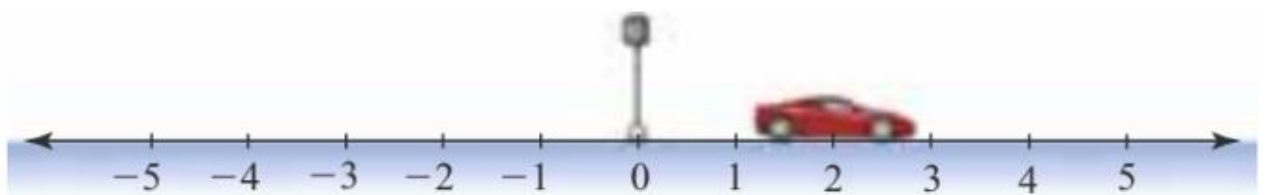
Logro /competencia: **Identifica y describe el cambio de posición, la trayectoria y el desplazamiento de un cuerpo respecto a un sistema de referencia.**

Tema: Funciones y gráficas

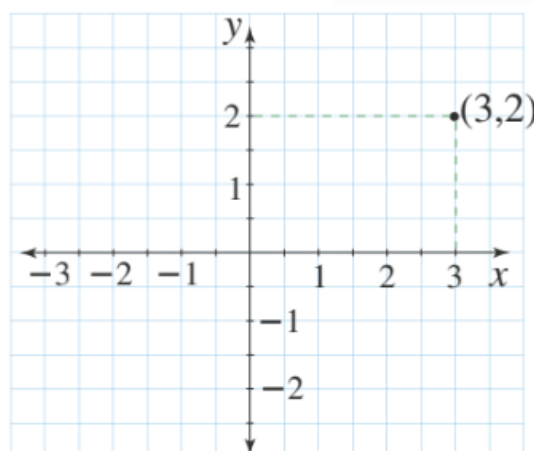
## 1. SISTEMAS COORDENADOS

En la mayoría de estudios es necesario efectuar medidas relacionadas con los factores que intervienen en un fenómeno. Los datos que se obtienen de las mediciones, en lo posible, se presentan por medio de representaciones gráficas que pueden ser en una dimensión, en dos dimensiones o en tres dimensiones.

- En una dimensión se representan los valores de una variable sobre la recta de los números reales. Por ejemplo, la posición de un objeto que se mueve en línea recta se puede representar sobre una recta, como se muestra en la siguiente figura:



- En dos dimensiones se utiliza el plano cartesiano, en el que a cada punto le corresponde una pareja ordenada. Este tipo de representación es muy útil para analizar los datos obtenidos en un experimento o para relacionar variables.



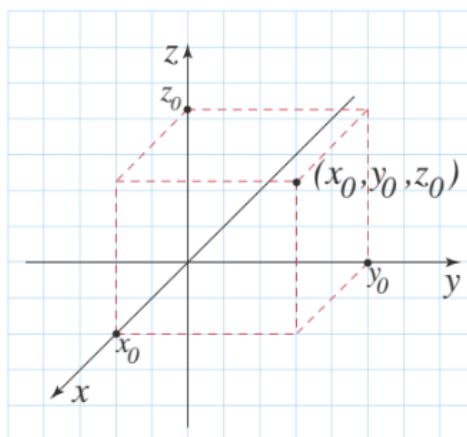
**Figura 11.** En el plano cartesiano a cada punto le corresponde un par ordenado.

- En tres dimensiones se representan puntos en el espacio, lo cual se realiza por medio de un sistema de tres ejes coordenados, perpendiculares entre sí, llamados eje x, eje y y eje z. En



“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo” Nelson Mandela.

este caso, a cada punto del espacio le corresponde una terna  $(x, y, z)$ , como se muestra en la figura 12.



**Figura 12.** En la representación gráfica de tres dimensiones se representan puntos en el espacio.

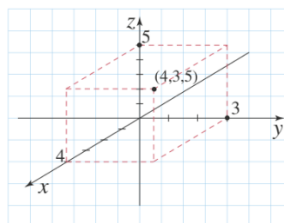
Este tipo de representación es útil, por ejemplo, para describir el movimiento de un objeto que se mueve en el espacio; se utilizan los tres ejes coordenados.

#### \* EJEMPLO

Representar gráficamente en el espacio el punto  $(4, 3, 5)$ .

**Solución:**

Para representar el punto  $(4, 3, 5)$  se ubica sobre el eje  $x$  el punto cuya coordenada es 4, y sobre el eje  $y$  el punto cuya coordenada es 3. Se trazan segmentos paralelos a los ejes  $x$  y  $y$ . Luego, se traza un segmento paralelo al eje  $z$  de longitud 5 unidades.



## 2. LAS VARIABLES EN UN EXPERIMENTO

En un experimento influyen muchos factores. A estos factores se les conoce con el nombre de variables. Una vez identificadas las variables que intervienen en el transcurso de un experimento, se clasifican en variables que se mantienen constantes mientras que otras toman diferentes valores. A una variable cuyos valores dependen de los valores que toma la otra variable se le llama variable dependiente y a la otra variable se le llama variable independiente.



**Figura 13.** Es posible encontrar la relación matemática entre la masa del objeto que se cuelga y el alargamiento producido en el resorte.



*“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo” Nelson Mandela.*

Para ilustrar la manera como se realiza un tratamiento de datos, consideremos el estudio del alargamiento de un resorte cuando se suspenden pesas en su extremo (figura 13). En este caso, la longitud de alargamiento del resorte ( $A$ ), es la variable dependiente, la masa ( $m$ ) del objeto que colgamos es la variable independiente y la elasticidad del resorte es una variable controlada que mantenemos constante, ya que se trata del mismo resorte.

En un experimento se puede tener más de una variable cuyo cambio afecta la variable dependiente. Por ejemplo, para estudiar el comportamiento del volumen de un gas, se tiene que este depende de la presión a la cual se somete y de la temperatura a la cual se encuentra. Una variación en la presión produce una variación en el volumen; así mismo, una variación en la temperatura produce una variación en el volumen.

Dadas las múltiples situaciones de la vida cotidiana en las cuales intervienen relaciones entre dos variables, resulta útil recurrir al concepto de función definido en matemáticas. Por ejemplo, para el caso del resorte, la variable alargamiento está representada en función de la variable masa, pues a cada valor de la masa que se cuelga, le corresponde un único valor del alargamiento.

Como sabemos, hay varias formas de representar funciones y es posible establecer relaciones entre las distintas formas de representación.

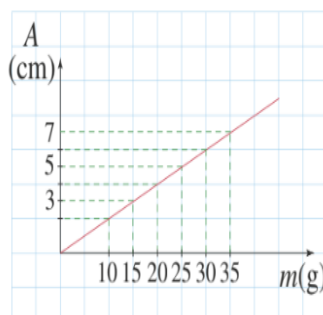
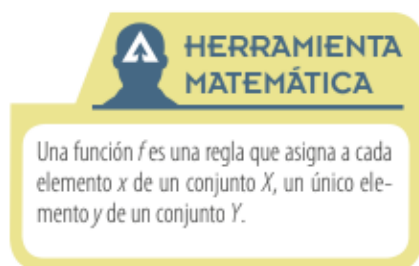
### 3. LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

Tanto las funciones como las relaciones entre dos variables se pueden representar a partir de tablas de datos. Una tabla es un arreglo, de dos filas o dos columnas, en el cual se escriben todos o algunos valores de la variable independiente y los respectivos valores de la variable dependiente. En la siguiente tabla se presentan los valores de la masa del cuerpo colgada del resorte y su respectivo alargamiento.

<b>Masa del cuerpo colgado (g)</b>	10	15	20	25	30	35
<b>Alargamiento (cm)</b>	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0

La representación gráfica de una función se construye en el plano cartesiano. Sobre el eje  $x$  se ubica el rango entre el cual están los valores dados a la variable que se considera independiente. Sobre el eje  $y$  se ubica el rango entre el cual están los valores que corresponden a la variable dependiente.

La representación gráfica de una función se obtiene al constituir en el plano cartesiano un número suficiente de parejas ordenadas. A continuación, presentamos la gráfica.



El alargamiento  $A$  del resorte depende de la masa  $m$  del cuerpo que se cuelga.

Es importante anotar que, a partir de la gráfica, se puede analizar el comportamiento de la función.



“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo” Nelson Mandela.

### 3.1 Proporcionalidad directa

**Definición.** Dos magnitudes son directamente proporcionales si la razón entre cada valor de una de ellas y el respectivo valor de la otra es igual a una constante.

A la constante se le llama constante de proporcionalidad.

Si dos magnitudes, x y y, son directamente proporcionales, se cumple que:

- El cociente entre ellas siempre es constante, es decir  $y / x = k$ , donde k se denomina constante de proporcionalidad.
- sus valores se relacionan mediante la expresión  $y = k * x$ .

**HERRAMIENTA MATEMÁTICA**

La pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  en el plano cartesiano se define como

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En la gráfica presentada en la página anterior podemos observar que cuanto mayor es la masa (m) del objeto que colgamos del resorte, mayor es su alargamiento (A). Además, al duplicar la masa, el alargamiento se duplica, al triplicar la masa, el alargamiento se triplica, y así sucesivamente. De esta manera, al dividir el alargamiento entre el respectivo valor de la masa siempre se obtiene el mismo valor.

#### \* EJEMPLO

Un tren avanza 40 km hacia el norte cada vez que transcurre una hora.

- Elaborar una tabla de valores para la distancia recorrida en los tiempos 1, 2, 3, 4 y 5 horas.
- Determinar la razón entre cada distancia y su respectivo tiempo. ¿Las variables distancia y tiempo son directamente proporcionales?
- Realizar la gráfica que representa los valores de las variables.

**Solución:**

- El tiempo y la distancia que recorre se representan en la siguiente tabla.

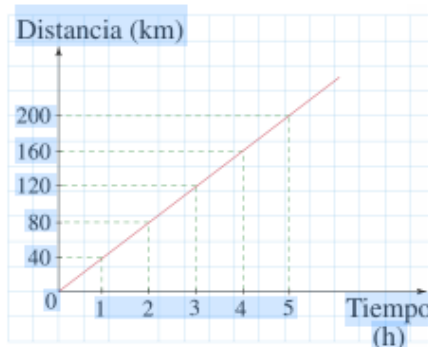
<b>Tiempo (horas)</b>	1	2	3	4	5
<b>Distancia (kilómetros)</b>	40	80	120	160	200

- La razón entre cada valor de la distancia y su respectivo valor del tiempo se obtiene así:

$$\frac{40}{1} = 40, \frac{80}{2} = 40, \frac{120}{3} = 40, \frac{160}{4} = 40 \text{ y } \frac{200}{5} = 40$$

Las magnitudes distancia recorrida y tiempo son directamente proporcionales, porque la razón entre sus respectivos valores es constante e igual a 40. Es decir, la constante de proporcionalidad es 40 km/h.

- En la figura se puede observar la representación gráfica de la función que relaciona las variables distancia y tiempo.





“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo” Nelson Mandela.

Al representar, en el plano cartesiano, dos magnitudes directamente proporcionales se obtiene una recta que pasa por el origen. El valor de la pendiente de esta recta corresponde a la constante de proporcionalidad.

En el ejemplo del tren de la página anterior, los valores de la distancia recorrida y el tiempo se pueden relacionar mediante la expresión  $d = 40t$ .

Observemos que la pendiente de la recta es

$$\text{Pendiente} = \frac{200m - 0m}{5h - 0h} = 40m/h$$

### 3.2 Proporcionalidad inversa

**Definición.** Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto de cada valor de una magnitud por el respectivo valor de la otra es igual a una constante, llamada constante de proporcionalidad inversa.

Por ejemplo, el tiempo,  $t$ , y la velocidad,  $v$ , empleados en recorrer determinada distancia son magnitudes inversamente proporcionales. A medida que la velocidad aumenta, el tiempo que emplea en el recorrido disminuye, de tal manera que si la velocidad se duplica, el tiempo se reduce a la mitad; si la velocidad se triplica, el tiempo se reduce a la tercera parte, y así sucesivamente.

Si dos magnitudes,  $x$  y  $y$ , son inversamente proporcionales se cumple que:

- El producto entre ellas es constante, es decir  $x \cdot y = k$ , donde  $k$  es la constante de proporcionalidad inversa.
- Sus valores se relacionan mediante la expresión  $y = k/x$

#### \* EJEMPLO

Se desea cortar placas rectangulares cuya área sea igual a  $36 \text{ cm}^2$ .

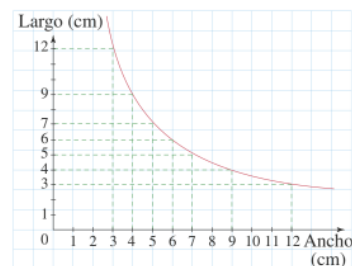
- Elaborar la tabla que muestra los posibles valores para el largo y el ancho de las placas.
- Determinar la relación entre el largo,  $l$ , y el ancho,  $a$ , de los rectángulos.
- Determinar la expresión matemática que relaciona el largo y el ancho de las placas.
- Realizar la gráfica que representa los valores del largo y el ancho.

**Solución:**

- Una tabla de valores podría ser la siguiente:

Largo (cm)	3,0	4,0	5,0	6,0	7,2	9,0	12,0
Ancho (cm)	12,0	9,0	7,2	6,0	5,0	4,0	3,0

- Observamos que, cuando el largo del rectángulo aumenta, el ancho disminuye. Además, es posible observar que al duplicar el largo, el ancho disminuye a la mitad; al triplicar el largo, el ancho disminuye a la tercera parte, etc. Así, entre el largo y el ancho de las placas de área  $36 \text{ cm}^2$ , podemos establecer una relación de proporcionalidad inversa.
- El producto del largo,  $l$ , por el ancho,  $a$ , siempre toma el mismo valor, 36. Por tanto,  $l \cdot a = 36$ .
- Al representar los datos en el plano cartesiano obtenemos la gráfica que se muestra a continuación.





“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo” Nelson Mandela.

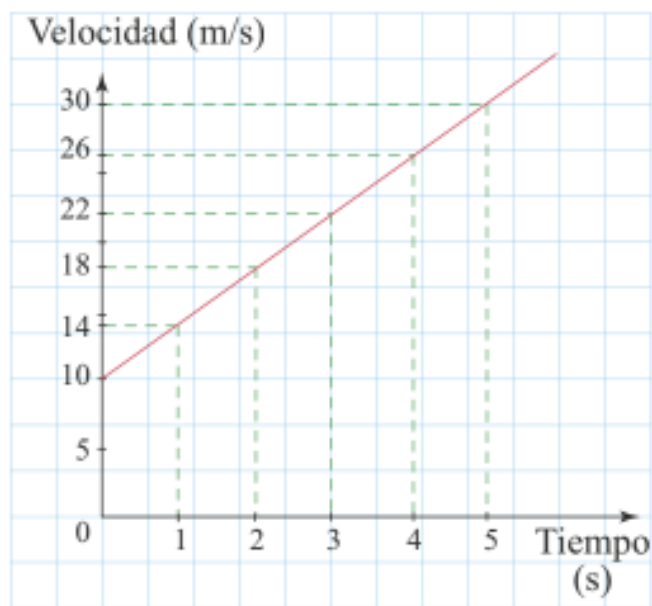
### 3.3 Otras relaciones entre variables

- Relación gráfica de una línea recta

Algunas variables se relacionan de tal manera que la representación gráfica es una línea recta que no necesariamente pasa por el origen de coordenadas. En este caso, puede suceder que, cuando una variable aumenta, la otra también aumenta y, sin embargo, las variables no son directamente proporcionales. En la siguiente tabla se presentan los valores de la velocidad de un objeto para diferentes valores del tiempo.

<b>Tiempo (s)</b>	0	1	2	3	4	5
<b>Velocidad (m/s)</b>	10	14	18	22	26	30

La representación gráfica de los valores en el plano cartesiano es una recta que no pasa por el origen, como se muestra a continuación.



Podemos determinar la ecuación de la recta mediante el cálculo de la pendiente y el valor en el que la gráfica corta al eje vertical (eje que representa la velocidad).

$$\text{Pendiente} = \frac{30 \text{ m} - 10 \text{ m}}{5 \text{ s} - 0} = 4 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que relaciona las variables  $v$  y  $t$  es:

$$v = 4 t + 10$$



La ecuación de la recta en el plano  $x - y$ , cuya pendiente es  $m$  y corta al eje vertical en  $y = b$  es  $y = mx + b$



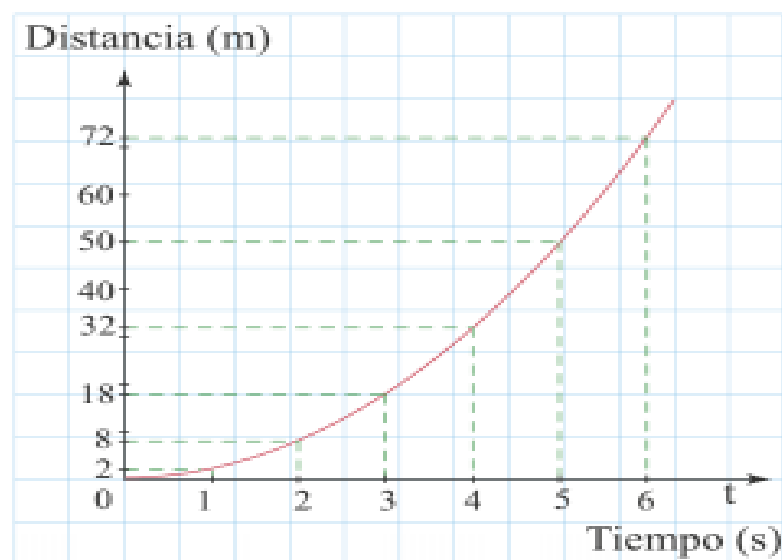
*“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo” Nelson Mandela.*

- Relación cuadrática

Algunas magnitudes se relacionan mediante una relación cuadrática, como es el caso de un objeto que se mueve en línea recta y la distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo. En la siguiente tabla se muestran los datos de la distancia y el tiempo para el movimiento de un objeto bajo esta condición.

<b>Tiempo (s)</b>	0	1	2	3	4	5	6
<b>Distancia (m)</b>	0	2	8	18	32	50	72

La representación gráfica de los valores de la variable se representa en la figura 14. Aunque la distancia aumenta cuando el tiempo aumenta, en este caso las variables no son directamente proporcionales y la gráfica no es una línea recta que pasa por el origen.



**Figura 14.** La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.